Corrigé du devoir surveillé n° 5

1. On peut écrire par exemple : $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln(x) + \dfrac{1}{2}x^2$

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right) = +\infty$ (limite d'un produit).

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln(x) = +\infty$ (limite d'un produit).

   Comme d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x^2 = +\infty$,

   on obtient : $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln(x) + \dfrac{1}{2}x^2 = +\infty$ (limite d'une somme).

   On peut aussi utiliser la propriété donnant la limite d'un polynôme en $\pm\infty$.

2. Écrivons : $f(x) = (x-2)\times x\times\ln(x) + \dfrac{1}{2}x^2$.

   D'après le cours, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.

   D'autre part, $\lim\limits_{x\to0^+} x-2 = -2$.

   Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0^+} (x-2)\times x\ln(x) = 0$ (limite d'un produit).

   Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{2}x^2 = 0$.

   Donc : $\lim\limits_{x\to0} (x-2)\times x\times\ln(x) + \dfrac{1}{2}x^2 = 0$.

3. En $+\infty$, la limite n'est pas finie, donc pas d'asymptote.

   En 0^+, la limite est finie, donc pas d'asymptote non plus.

4. Posons : $u(x) = x^2-2x$ et $v(x) = \ln(x)$.

   Alors : $u'(x) = 2x-2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

   D'après la formule de dérivation d'un produit, on peut écrire :

   $f'(x) = u'v(x) + uv'(x) + \dfrac{1}{2}\times 2x$

   $f'(x) = (2x-2)\ln(x) + (x^2-2x)\times\dfrac{1}{x} + x$

   $f'(x) = (2x-2)\ln(x) + x-2+x$

   $f'(x) = (2x-2)\ln(x) + 2x-2$

   On factorise :

   $f'(x) = (2x-2)(\ln(x)+1)$

   $f'(x) = 2(x-1)(\ln(x)+1)$

5. On étudie le signe d'un produit, donc celui de chacun des facteurs.

   $x-1\geq 0$ est équivalent à $x\geq 1$

   $\ln(x)+1\geq 0$ est successivement équivalent à :

   $\ln(x)\geq -1$

   $\mathrm{e}^{\ln(x)}\geq \mathrm{e}^{-1}$ (la fonction exponentielle est croissante)

   $x\geq \mathrm{e}^{-1}$

   On en déduit le tableau de signes :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

6. On peut alors dresser le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$2\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

$f(1) = (1^2 - 2\times 1)\times \ln(1) + \frac{1}{2}\times 1^2 = \frac{1}{2}$

$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \left((\mathrm{e}^{-1})^2 - 2\times \mathrm{e}^{-1}\right)\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^2$

$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \left(\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}\right)\times(-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$

$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}^{-2} + 2\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$

$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2\mathrm{e}^2} \simeq 0{,}668$

7. La tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$ (cours de première).

$f(2) = (2^2 - 2\times 2)\ln(2) + \frac{2^2}{2} = 2$

$f'(2) = 2\times(2-1)(\ln(2)+1) = 2(\ln(2)+1)$

Ainsi : $\mathscr{T}$: $y = (2\ln(2)+2)(x-2)+2$

Ou : $y = (2\ln(2)+2)x - (2\ln(2)+2)\times 2 + 2 = (2\ln(2)+2)x - (4\ln(2)+4)+2$

Ou enfin : $y = (2\ln(2)+2)x - 4\ln(2) - 2$

8. Posons : $u(x) = 2(x-1)$ et $v(x) = \ln(x)+1$

Alors : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

Donc : $f''(x) = u'v(x) + uv'(x) = 2(\ln(x)+1) + 2(x-1)\times\frac{1}{x}$

$f''(x) = 2\ln(x) + 2 + 2 - \frac{2}{x}$

$f''(x) = 2\ln(x) - \frac{2}{x} + 4$

9. $g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{-2}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$

Vu que $x \in]0\,;+\infty[$, on a : $\frac{2}{x} > 0$ et $\frac{2}{x^2} > 0$, donc $g'(x)$ est un nombre strictement positif.

Par conséquent, g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

10. La fonction g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc une équation du type $g(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) ne peut pas avoir plus d'une solution.

On a : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\frac{1}{2}} + 4 = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \times 2 + 4 = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ et donc : $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

On trouve à la calculatrice : $g\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -1{,}4$

D'autre part : $g(1) = 2\ln(1) - \frac{2}{1} + 4 = 2$

Ainsi, g est continue (car dérivable), strictement croissante et 0 est compris entre $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g(1)$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.
C'est aussi la seule sur $]0\,;+\infty[$, vu que $g(x) = 0$ ne peut pas avoir plus d'une solution.
On trouve à la calculatrice : $\alpha \simeq 0{,}642$.

11. Comme g est strictement croissante et s'annule en $x = \alpha$, son signe est donné par le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Vu que $f'' = g$, on en déduit que f est concave sur $]0\,;\alpha]$ et convexe sur $[\alpha\,;+\infty[$.

12. Sur $[\alpha\,;+\infty[$, f est convexe, donc sa courbe est située au-dessus de ses tangentes, d'après la cours sur la convexité. En particulier, la partie de $\mathscr{C}$ correspondante est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}$.

Il reste à savoir ce qui se passe sur $]0\,;\alpha]$.
Regardons par exemple l'endroit où $\mathscr{T}$ coupe l'axe des abscisses : soit A le point de $\mathscr{T}$ d'ordonnée 0.
Son abscisse x_A vérifie : $(2\ln(2)+2)x_A - 4\ln(2) - 2 = 0$ (d'après la question 7).
Ainsi : $(2\ln(2)+2)x_A = 4\ln(2)+2$

$x_A = \frac{4\ln(2)+2}{2\ln(2)+2} = \frac{2\ln(2)+1}{\ln(2)+1}$

Ainsi, x_A est plus grand que 1, puisque le numérateur est plus grand que le dénominateur. A fortiori, x_A est plus grand que α.

On trouve d'ailleurs à la calculatrice : $x_A \simeq 1{,}41$.
On voit donc que les points de $\mathscr{T}$ dont l'abscisse appartient à $]0\,;\alpha]$ ont une ordonnée négative. Comme f est positive sur $]0\,;+\infty[$ (d'après le tableau de variation), la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $]0\,;\alpha]$ est aussi au-dessus de $\mathscr{T}$.

En résumé, $\mathscr{C}$ est située entièrement au-dessus de la tangente $\mathscr{T}$.