Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 2x)\ln(x) + \dfrac{1}{2}x^2$. Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on peut mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$).
2. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x-2) \times x \times \ln(x) + \dfrac{1}{2}x^2$, déterminer la limite de f en 0.
3. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des asymptotes (justifier) ?
4. Montrer que la dérivée de f vérifie : $f'(x) = 2(x-1)(\ln(x)+1)$.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
6. En déduire le tableau de variation de f (préciser les limites et les valeurs remarquables).
7. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
8. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie : $f''(x) = 2\ln(x) - \dfrac{2}{x} + 4$.

   Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln(x) - \dfrac{2}{x} + 4 = f''(x)$.
9. Déterminer la dérivée de g et montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
10. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution sur $]0\,;+\infty[$, comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et 1.
    On note α cette solution.
11. En déduire la convexité de f. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle un point d'inflexion (justifier) ?
12. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente $\mathscr{T}$.