Corrigé du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1.a) $\ln(5x) + \ln\left(\dfrac{x^6}{5}\right) = \ln(5) + \ln(x) + 6\ln(x) - \ln(5) = 7\ln(x)$

b) $\ln(x^2 \times \mathrm{e}^3) + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^7}{x^3}\right) = 2\ln(x) + 3\ln(\mathrm{e}) + 7\ln(\mathrm{e}) - 3\ln(x) = -\ln(x) + 10$

2.a) $\ln(5x - 1) = \ln(x) + \ln(3)$

On doit avoir : $5x - 1 > 0$ et $x > 0$, soit $x > \dfrac{1}{5}$

$\ln(5x - 1) = \ln(3x)$

$5x - 1 = 3x$

$2x = 1$

$x = \dfrac{1}{2}$ Solution valable puisque $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$

Ainsi : $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $\ln(x + 3) \leq \ln(x) + 1$

On doit avoir $x + 3 > 0$ et $x > 0$, soit $x > 0$

$\ln(x + 3) \leq \ln(x) + \ln(\mathrm{e})$

$\ln(x + 3) \leq \ln(\mathrm{e})$

$x + 3 \leq \mathrm{e}x$

$x - \mathrm{e}x \leq -3$

$x(1 - \mathrm{e}) \leq -3$

$x \geq \dfrac{-3}{1 - \mathrm{e}}$

$x \geq \dfrac{3}{\mathrm{e} - 1}$ Toutes ces solutions sont valables puisque si $x \geq \dfrac{3}{\mathrm{e} - 1}$, alors $x > 0$.

Ainsi : $\mathscr{S} = \left[\dfrac{3}{\mathrm{e} - 1}\,; +\infty\right[$

3.a) $g : g(x) = x^2 \ln(x)$

$g'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = 2x\ln(x) + x$

$g'(x) = x(2\ln(x) + 1)$

b) $h : h(x) = \ln(x^2 + 1)$

$h(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 + 1$

Alors : $h'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$h'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Exercice 2 :

Partie A :

1. $f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{5 - x}{x}$

2. Le dénominateur x est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $5-x$.
   $5-x \geq 0$
   $5 \geq x$
   Donc $f'(x)$ est positif si $0 < x \leq 5$.

3. Le tableau :

x	0		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\simeq 2{,}05$	↘	$-\infty$

   $f(5) = 5\ln(5) - 5 - 1 = 5\ln(5) - 6 \simeq 2{,}05$

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (d'après le cours)
   Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

5. $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln(x)}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (d'après le cours)
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5\dfrac{\ln(x)}{x} + 1 - \dfrac{1}{x} = 1$
   Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(5\dfrac{\ln(x)}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

6. Sur $]0;5]$, f est continue et strictement croissante; d'autre part, l'image de l'intervalle $]0;5]$ par f est $]-\infty;\simeq 2{,}05]$, qui contient 0.
   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a donc une solution unique sur $]0;5]$.

   Sur $]5;+\infty]$, f est continue et strictement décroissante; d'autre part, l'image de l'intervalle $]5;+\infty]$ par f est $]\simeq 2{,}05;-\infty[$, qui contient 0.
   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a donc une solution unique sur $]5;+\infty]$.

   Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$.

7. On obtient à la calculatrice : $\alpha \simeq 1{,}72$ et $\beta \simeq 10{,}98$

Partie B :

1. $g'(x) = 5 \times \dfrac{1}{x}$. Ainsi, $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
   Donc g est (strictement) croissante sur $]0;+\infty[$.

   On sait (d'après la partie A) que $f(\beta) = 0$, soit : $5\ln(\beta) - \beta - 1 = 0$.
   On en déduit : $5\ln(\beta) - 1 = \beta$, ce qui équivaut à : $g(\beta) = \beta$.

2. Voir graphique.

3. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1} \leq \beta$.
   Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $u_1 = 5\ln(u_0) - 1 = 5\ln(2) - 1 \simeq 2{,}47$.
   On a bien : $u_0 \leq u_1 \leq \beta$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

   Supposons : $u_n \leq u_{n+1} \leq \beta$ pour un certain rang n.
   Comme g est croissante, on en déduit : $g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\beta)$
   c'est à dire : $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \beta$.
   La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

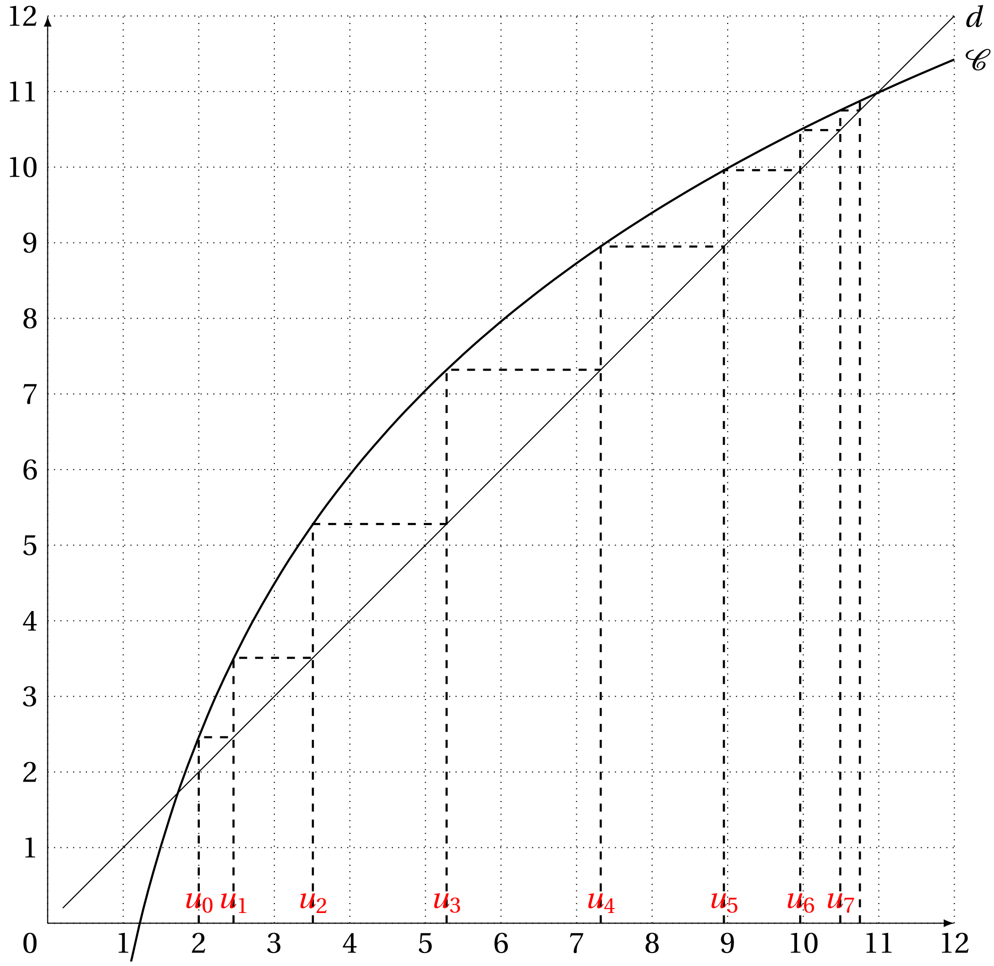
   La propriété est vraie pour $n = 0$.
   Si elle est vraie pour n, alors elle est vraie pour $n+1$.
   Alors, d'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Au passage, le fait que (u_n) soit croissante montre que $u_n \geq u_0 > 0$ pour tout n, et donc qu'on peut toujours calculer $5\ln(u_n) - 1$; autrement dit, cette formule définit bien une suite.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée (par β), donc convergente, d'après le théorème de convergence monotone.

   Soit ℓ la limite de (u_n).
   Comme g est continue, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell)$.
   Comme $g(u_n) = u_{n+1}$, ceci s'écrit aussi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = g(\ell)$.
   Mais d'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ (c'est la limite de la suite (u_n)).
   Par conséquent, ℓ est une des solutions de l'équation $g(x) = x$.
   Or $g(x) = x$ équivaut à $f(x) = 0$. Cette équation a donc exactement deux solutions qui sont α et β.
   La limite de (u_n) ne peut pas être α, car $u(n) \geq u_0 = 2$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 2$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \beta$.

Annexe :



12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
d
$\mathscr{C}$
u_0
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7