

Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 - (8 points) :

1. Simplifier et exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln(x)$:

a) $\ln(5x) + \ln\left(\frac{x^6}{5}\right)$

b) $\ln(x^2 \times e^3) + \ln\left(\frac{e^7}{x^3}\right)$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln(5x - 1) = \ln(x) + \ln(3)$

b) $\ln(x + 3) \leq \ln(x) + 1$

3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $g : g(x) = x^2 \ln(x)$

b) $h : h(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 2 (12 points) :

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x) - x - 1$.

1. Déterminer la dérivée f' de f .

2. Étudier le signe de f' sur $]0; +\infty[$.

3. En déduire le tableau de variations de f .

Préciser sur le tableau une valeur approchée à 10^{-2} du maximum de f sur $]0; +\infty[$.

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et compléter le tableau.

5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et compléter le tableau. (On pourra factoriser $f(x)$ par x).

6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$. On note α la plus petite et β la plus grande.

7. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de α et β .

Partie B :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n) - 1 \end{cases}$$

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 5\ln(x) - 1$.

Montrer que g est croissante et que $g(\beta) = \beta$.

2. Sur le graphique en annexe, on a représenté $\mathcal{C}$, la représentation graphique de g et la droite d d'équation $y = x$.

Noter sur le graphique $u_0, u_1, u_2, \dots, u_8$.

3. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par β . (on peut utiliser la question 1).

4. En déduire que (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Annexe :

