

Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

Important : Dans l'exercice 1, les probabilités en lien avec la loi binomiale doivent être calculées en utilisant la formule du cours.

Dans l'exercice 2, les probabilités peuvent être calculées en utilisant directement la calculatrice.

Exercice 1 :

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.

On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
 - a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Cinq joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
 - a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
 - b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'il y ait exactement 3 joueurs gagnants.
 - c) Calculer $P(X \geq 1)$ en arrondissant à 10^{-3} . Donner une interprétation du résultat obtenu.
 - d) En moyenne, parmi cinq joueurs qui font une partie, combien sont gagnants? (Arrondir à 10^{-3} .)

Exercice 2 :

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).

Parmi ces courriels, 5 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.

On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.

Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam »;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- \bar{S} et \bar{I} les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2.
 - a) Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,045.
 - b) Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
 - c) Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam? On donnera un résultat arrondi au millième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

- a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z , et quels sont ses paramètres?
- b) Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, trois exactement soient du spam? On donnera un résultat arrondi au millième.
- c) Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, cinq au moins soient du spam? On donnera un résultat arrondi au millième.
- d) Calculer l'espérance $E(Z)$ et la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z .
Interpréter la valeur de $E(Z)$ dans le contexte de l'exercice.