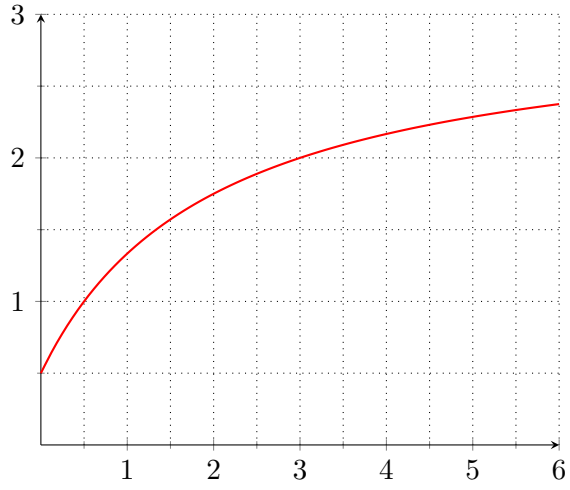
Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1 :

1. Étudier la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$.

   D'abord, afficher la courbe donne une petite idée :



   La fonction a plutôt l'air d'être croissante.

   Comme d'habitude, on considère le signe de la dérivée. On applique la formule donnant la dérivée d'un quotient :
   $f'(x) = \dfrac{3\times(x+2)-(3x+1)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$ pour tout x.
   La dérivée est positive, donc la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+2}$.
   Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
   On remarque que : $u_{n+1} = f(u_n)$.
   On trouve :
   $u_1 = f(u_0) = 2\,;\ u_2 = f(u_1) = \dfrac{7}{4} = 1{,}75\,;\ u_3 = f(u_2) = \dfrac{5}{3} \simeq 1{,}67$ et $u_4 = f(u_3) = \dfrac{18}{11} \simeq 1{,}64$

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;+\infty[$. (On peut utiliser la question 1.)
   Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 3$

   Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier n. On a donc : $u_n \in [0\,;+\infty[$.
   D'après la question 1, la fonction f est croissante, donc conserve l'ordre.
   Par conséquent : $u_n \geq 0$ implique $f(u_n) \geq f(0)$
   c'est à dire : $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$. Donc $u_{n+1} \geq 0$.

   Ainsi, la propriété est héréditaire.

   Récapitulons :
   * La propriété est vraie au rang $n = 0$,
   * Elle est héréditaire (si elle est vraie pour n, alors elle est aussi vraie pour $n+1$),
   donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Démontrer par récurrence que pour la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 1.)
On considère la propriété : $u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : comme $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$, alors $u_1 \leq u_0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier n. On a donc : $u_{n+1} \leq u_n$.
D'après la question 1, la fonction f est croissante, donc conserve l'ordre.
Par conséquent : $u_{n+1} \leq u_n$ implique $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$
c'est à dire : $u_{n+2} \leq_{n+1}$.

Ainsi, la propriété est héréditaire.

Récapitulons :
* La propriété est vraie au rang $n = 0$,
* Elle est héréditaire (si elle est vraie pour n, alors elle est aussi vraie pour $n + 1$),
donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante.

Remarque importante : On voit qu'une suite définie par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ peut très bien être décroissante, même si la fonction f est croissante.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.

6. Déterminer la limite de (u_n) en résolvant une équation.
Soit ℓ la limite de (u_n).
On a pour tout n : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 2}$ (par définition) ;
et d'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

Donc, en remplaçant : $\ell = \dfrac{3\ell + 1}{\ell + 2}$.

On en déduit :
$\ell(\ell + 2) = 3\ell + 1$
$\ell^2 + 2\ell = 3\ell + 1$
$\ell^2 - \ell - 1 = 0$

On résout cette équation. $\Delta = 5$ donc, il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
On voit que $x_1 < 0$; x_1 ne peut pas être la limite de (u_n), puisque $u_n \geq 0$ pour tout n.

Donc la limite de la suite (u_n) est $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. (C'est ce qu'on appelle le nombre d'or.)

Exercice 2 :

L'objectif est de démontrer le résultat du cours : si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

1. Soit a un nombre réel strictement positif.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

La propriété est vraie pour $n = 1$ car $(1 + a)^1 = 1 + 1 \times a$.
Elle est vraie pour $n = 0$ pour tout $a \neq -1$; pour $a = -1$, on obtient 0^0, qui n'existe pas ; mais c'est sans importance pour la suite.

2. Soit $q > 1$. On pose $q = 1 + a$.
En utilisant un théorème de comparaison, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Posons : $u_n = (1 + a)^n$ et $v_n = 1 + na$.

Ici, $q > 1$, donc $a > 0$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ (limite de référence)
donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} na = +\infty$ (par produit)
donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ (par somme).
Or, pour tout n, $u_n \geq v_n$ (d'après la question 1).

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, c'est à dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.