Mathématiques - Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 (6 points) :

Déterminer la limite en $+\infty$ des suites définies ci-dessous en utilisant les résultats du cours. Chaque suite est définie sur $\mathbb{N}$, sauf mention contraire.

1. $u_n = n^3 - \dfrac{2}{n^2}$ sur $\mathbb{N}^*$
2. $w_n = n^2\sqrt{n} + 7n$
3. $a_n = (-n)^5 - 6n^2$
4. $t_n = -1,875 \times 5^n$
5. $r_n = 3 \times 0,1^n$
6. $t_n = \dfrac{n+3}{2n^2+1}$

Exercice 2 (4 points) :

Déterminer la limite des suites ci-dessous en utilisant un théorème de comparaison.

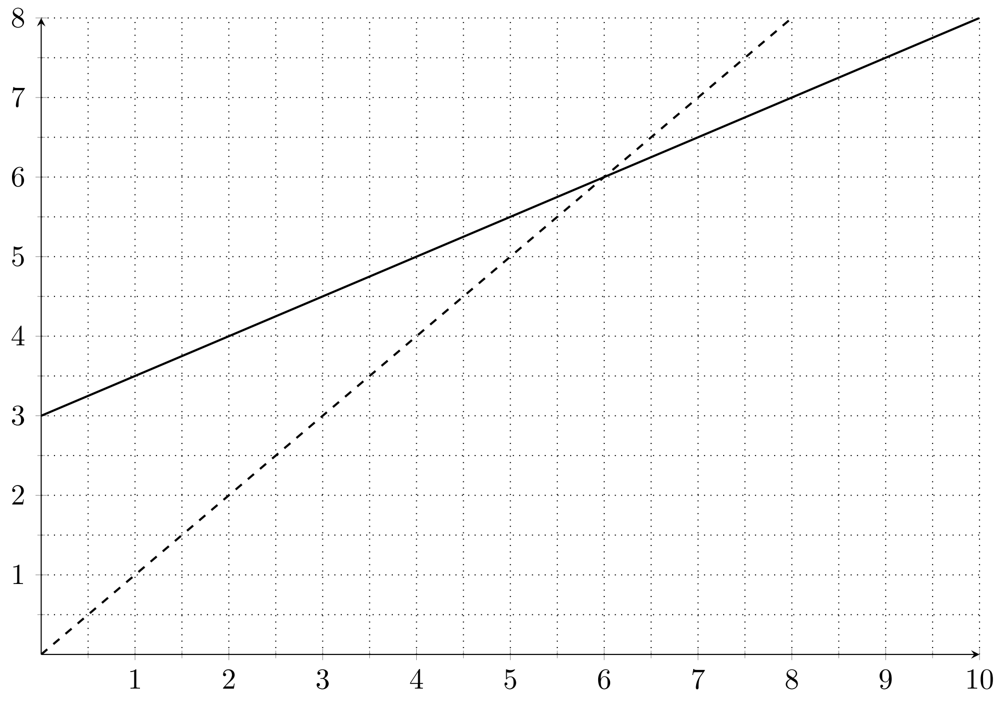
1. $u_n = n + 3\cos(n)$
2. $v_n = 8 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Exercice 3 (10 points) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 3$ est tracée dans le graphique ci-dessous ainsi que la droite d'équation $y = x$.



   Construire u_1, u_2 et u_3 sur le graphique (laisser les traits de construction).

3. Au vu du graphique, quelle conjecture peut-on faire concernant la suite (u_n) (croissance, limite...) ?

4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 6$.
5. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
6. Démontrer que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de déterminer la limite).
7. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
8. Calculer v_0 et exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
9. Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 6 - 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
10. En déduire la limite de la suite (u_n).