Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 (6 points) :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme).

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$ (par produit).
   D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 7n = +\infty$.
   Donc (par somme) : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n)^5 = \lim\limits_{n\to+\infty} -n^5 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -6n = -\infty$.
   Donc (par somme) : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

4. Comme $5 > 1$, alors d'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$
   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.

5. Comme $-1 < 0,1 < 1$, alors d'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$
   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.
6. C'est le deuxième t_n de l'exercice, une erreur de ma part...
   Ici, on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
   On met en facteur les termes prépondérants : $\dfrac{n+3}{2n^2+1} = \dfrac{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right) = 1$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n^2}\right) = 2$

   Donc (par quotient) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{2}$

   D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

   Et donc (par produit) : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{2} = 0$

Exercice 2 (4 points) :

1. On sait que pour tout n : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$
   Donc : $n - 3 \leq n + 3\cos(n) \leq n + 3$
   Posons : $t_n = n - 3$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.
   Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n \leq u_n$, alors d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2. On sait que pour tout n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

   Donc : $8 - \dfrac{1}{n} \leq 8 + \dfrac{(-1)^n}{n} \leq 8 + \dfrac{1}{n}$

   Posons : $r_n = 8 - \dfrac{1}{n}$ et $s_n = 8 + \dfrac{1}{n}$.

   On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 8$.

   Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n \leq v_n \leq s_n$, alors d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 8$.

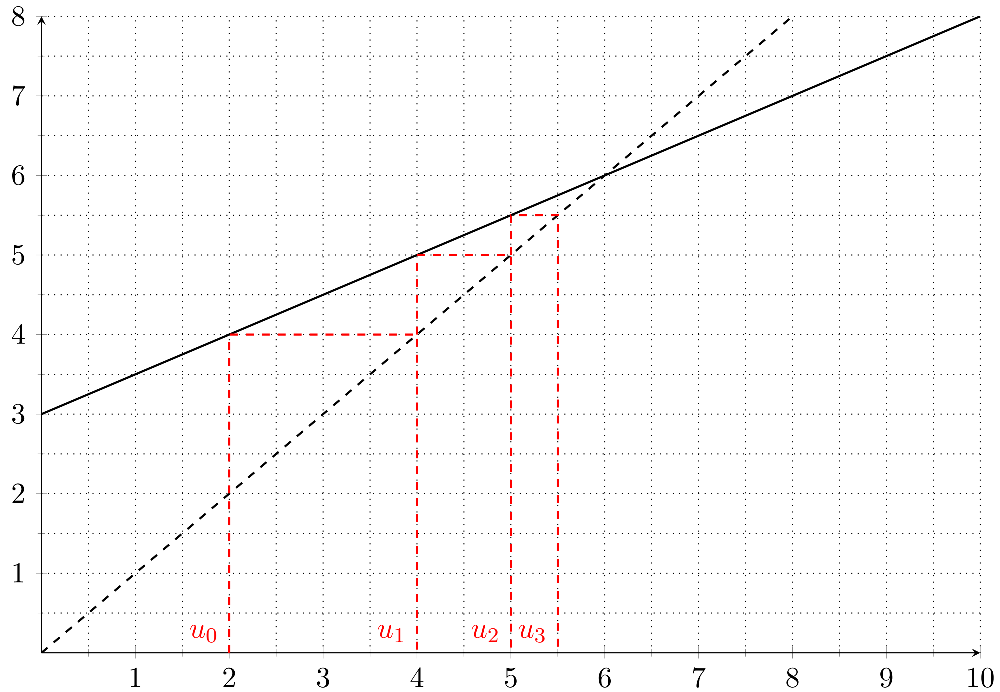
Exercice 3 (10 points) :

1. $u_1 = \dfrac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$

   $u_2 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$

   $u_3 = \dfrac{1}{2} \times 5 + 3 = 5,5$

2.



3. On peut conjecturer que la suite est croissante et de limite 6...

4. On veut démontrer que la propriété : $u_n \leq 6$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   • Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \leq 6$.

   • Supposons cette propriété vraie pour un certain n et montrons qu'elle est alors vraie pour $n+1$.
   On suppose donc : $u_n \leq 6$ et on veut en déduire : $u_{n+1} \leq 6$.

   $u_n \leq 6$ implique successivement :
   $\dfrac{1}{2}u_n \leq \dfrac{1}{2} \times 6$
   $\dfrac{1}{2}u_n + 3 \leq \dfrac{1}{2} \times 6 + 3$
   soit : $u_{n+1} \leq 6$

   Récapitulons :

• La propriété est vraie pour $n = 0$.
• Si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$ (hérédité).
Alors, d'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On veut démontrer que la propriété : $u_n \leq u_{n+1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   • Cette propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \leq u_1$.

   • Supposons cette propriété vraie pour un certain n et montrons qu'elle est alors vraie pour $n+1$.
   On suppose donc : $u_n \leq u_{n+1}$ et on veut en déduire : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

   $u_n \leq u_{n+1}$ implique successivement :
   $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_{n+1}$
   $\frac{1}{2}u_n + 3 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$
   soit : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

   Récapitulons :
   • La propriété est vraie pour $n = 0$.
   • Si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$ (hérédité).
   Alors, d'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. La suite (u_n) est croissante (d'après la question 5) et majorée par 6 (d'après la question 4).
   Par conséquent, elle est convergente (d'après le théorème de convergence monotone).

7. De l'égalité $v_n = u_n - 6$, on déduit : $u_n = v_n + 6$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + 6$

   Remplaçons dans la formule de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

   On obtient : $v_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}(v_n + 6) + 3$
   $v_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} \times 6 + 3$
   $v_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}v_n + 6$
   $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

   On passe de v_n à v_{n+1} en multipliant toujours par le même nombre $\frac{1}{2}$, donc la suite (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$.

8. $v_0 = u_0 - 6 = 2 - 6 = -4$

   Comme (v_n) est géométrique, alors d'après la formule de première :
   pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

9. On a pour tout n : $u_n = v_n + 6$, donc en remplaçant : $u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

10. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

    Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 6 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6$

    On obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$, en accord avec le graphique.