Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 (2 points) :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{8}{11}\right)^n = 0$ car $\dfrac{8}{11}\in]-1\,;1[$.

   Donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{8}{11}\right)^n = 0}$

2. $t_n = \dfrac{n+3}{2n^2+1} = \dfrac{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{n\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}$ pour $n \neq 0$

   D'après les limites des suites de référence :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n} = 1$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n^2} = 2$

   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

   Donc par produit et quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+3}{2n^2+1} = 0}$

Exercice 2 (6 points) :

1. Proposition 1 : Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

   Supposons (u_n) convergente, de limite ℓ. Comme les u_n sont tous positifs, on sait que cette limite est un nombre positif (d'après la propriété de passage des inégalités larges à la limite.)

   Si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$ d'après les propriétés des limites (3e tableau).

   Donc : (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{6}{\ell}$

   En revanche, si $\ell = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ et donc (v_n) n'est pas convergente.

   La proposition 1 est donc $\boxed{\text{fausse}}$.

2. Proposition 2 : Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par 3.

   (u_n) est minorée par 2 signifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

   Les deux termes sont positifs. On en déduit en passant aux inverses : $\dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$

   Donc : $\dfrac{6}{u_n} \leq \dfrac{6}{2}$, soit : $v_n \leq 3$. Autrement dit, la suite (v_n) est *majorée* par 3.

   La proposition 2 est donc $\boxed{\text{fausse}}$.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

   (u_n) est décroissante signifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

   Les deux termes sont positifs. On en déduit en passant aux inverses : $\dfrac{1}{u_{n+1}} \geq \dfrac{1}{u_n}$

   Donc : $\dfrac{6}{u_{n+1}} \geq \dfrac{6}{u_n}$ (6 est positif)

   C'est à dire : $v_{n+1} \geq v_n$.

   La suite (v_n) est croissante.

   La proposition 3 est donc $\boxed{\text{vraie}}$.

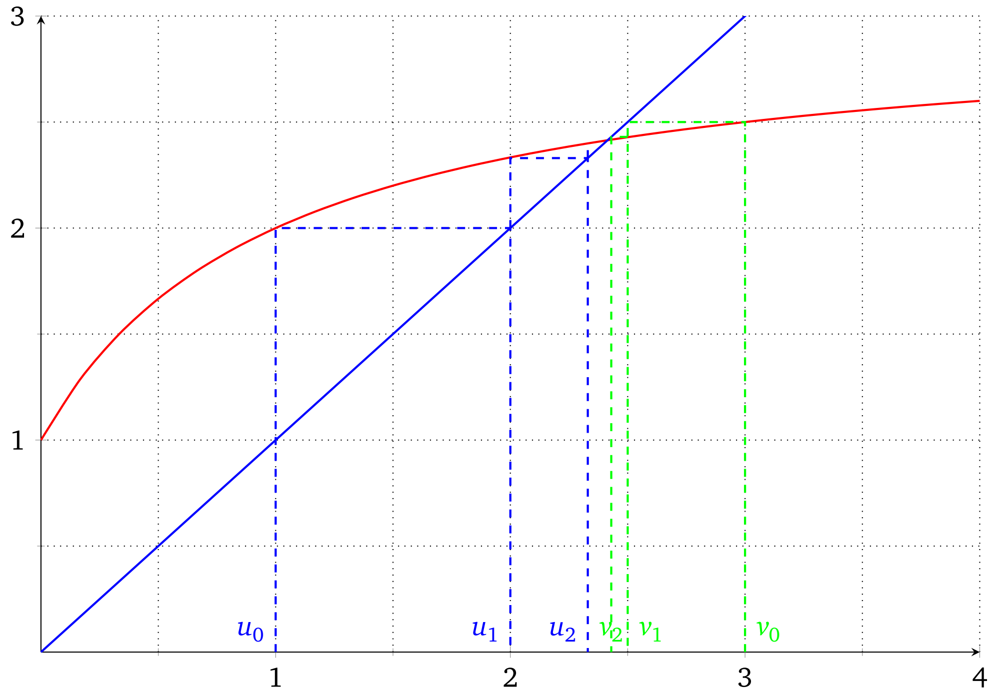
Exercice 3 (12 points) :

1. D'après la formule donnant la dérivée d'un quotient : $f'(x) = \dfrac{3 \times (x+1) - (3x+1) \times 1}{(x+1)^2}$

   Donc : $f'(x) = \dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

x	0	4
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	$\frac{13}{5}$

   Si $1 \leq x \leq 3$, alors, vu que f est croissante : $f(1) \leq f(x) \leq f(3)$, soit : $2 \leq f(x) \leq \dfrac{5}{2}$.
   Ceci implique bien sûr : $1 \leq f(x) \leq 3$.

2. 

   On peut conjecturer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et que les deux suites sont convergentes.

3. • On veut démontrer la proposition : $1 \leqslant v_n \leqslant 3$ pour tout n.

   Initialisation : Cette propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $v_0 = 3$

   Hérédité : Supposons qu'elle est vraie pour un certain n : $1 \leqslant v_n \leqslant 3$
   D'après la question 1, on en déduit : $1 \leqslant f(v_n) \leqslant 3$
   Et comme $f(v_n) = v_{n+1}$, on obtient : $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 3$.
   La propriété est héréditaire.

   Récapitulons : La propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$.
   D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

- On veut démontrer la proposition : $v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout n.

  Initialisation : Cette propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $v_0 = 3$ et $v_1 = 2{,}5$

  Hérédité : Supposons qu'elle est vraie pour un certain n : $v_{n+1} \leqslant v_n$
  D'après la question 1, comme f est croissante sur $[0\,;4]$ alors : $f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$
  Et comme $f(v_n) = v_{n+1}$ et $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$, on obtient : $v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$.
  La propriété est héréditaire.

  Récapitulons : La propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$.
  D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

4. $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3v_n+1}{v_n+1} - \dfrac{3u_n+1}{u_n+1} = \dfrac{(3v_n+1)(u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} - \dfrac{(v_n+1)(3u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$
   $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(3v_nu_n+3v_n+u_n+1)-(3v_nu_n+v_n+3u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$
   $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3v_nu_n+3v_n+u_n+1-3v_nu_n-v_n-3u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$
   $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3v_n+u_n-v_n-3u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$
   $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2v_n-2u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} = \dfrac{2(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}$

   On veut démontrer que $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout n.
   C'est vrai pour $n = 0$, puisque $v_0 = 3$ et $u_0 = 1$.
   Supposons que : $v_n - u_n \geqslant 0$ pour un certain n.
   Comme de plus $u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$, alors le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc :
   $\dfrac{2(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)} \geq 0$
   Ainsi : $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$. La propriété est héréditaire.

   Récapitulons : La propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$.
   D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

   D'autre part, comme $u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$, alors : $u_n + 1 \geq 2$ et $v_n + 1 \geq 2$.
   On en déduit en passant aux inverses : $\dfrac{1}{u_n+1} \leq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{v_n+1} \leq \dfrac{1}{2}$; donc : $\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \dfrac{1}{4}$

   Comme $(v_n - u_n) \geq 0$, on en déduit : $\dfrac{2(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \dfrac{2(v_n-u_n)}{4}$

   Donc $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$

5. La propriété est vraie pour $n = 0$ car $v_0 - u_0 = 2$.

   Supposons que pour un certain n, $v_n - u_n \leq 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   Alors, d'après la question précédente : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \dfrac{1}{2} \times 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   Ainsi : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$
   Donc, la propriété est héréditaire.

   Récapitulons : La propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$.
   D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

6. La suite (u_n) est croissante et majorée (par 3). Donc elle est convergente, d'après le théorème de convergence monotone.
   De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée (par 1). Donc elle est convergente.
   De plus, pour tout n : $0 \leq v_n - u_n \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1\,;1[$.
   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.
   Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

   Déterminons la limite.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 1}$
   On en conclut donc (par unicité de la limite) que : $\alpha = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 1}$.
   Autrement dit, α est une solution de l'équation : $x = \frac{3x + 1}{x + 1}$.
   On la résout :
   $x(x+1) = 3x + 1$
   $x^2 - 2x - 1 = 0$.
   On trouve : $\Delta = 8$ et les deux solutions sont : $x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
   Comme $u_n \geq 1$ pour tout n, la solution x_1 doit être écartée. On peut donc en conclure que : $\alpha = 1 + \sqrt{2}$.