Mathématiques - Devoir surveillé n° 1

Sauf mention du contraire, les suites sont définies sur $\mathbb{N}$.

Exercice 1 (2 points) :

Déterminer la limite en $+\infty$ des suites définies ci-dessous en utilisant les résultats du cours.

1. $t_n = -\dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{8}{11}\right)^n$
2. $t_n = \dfrac{n+3}{2n^2+1}$

Exercice 2 (6 points) :

On considère une suite (u_n) de nombres *strictement positifs*. On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{6}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par 3.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

Exercice 3 (12 points) :

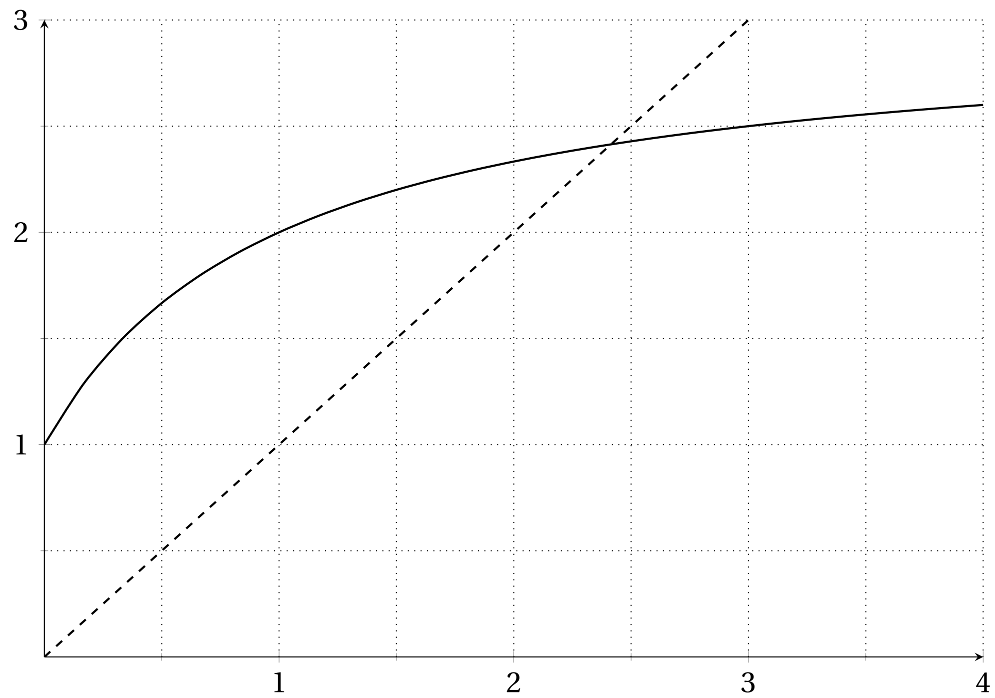
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

$v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;4]$. Montrer que si $x \in [1\,;\,3]$ alors $f(x) \in [1\,;\,3]$.
2. Le graphique donné ci-dessous représente la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.



Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

3. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
   - $1 \leqslant v_n \leqslant 3$.
   - $v_{n+1} \leqslant v_n$.

   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que pour tout entier naturel n, on a :
   - $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
   - $u_{n+1} \geqslant u_n$.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n : $\quad v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.

   En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
   - $v_n - u_n \geqslant 0$
   - $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
6. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer la valeur exacte de α.