Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$ (limite de référence)

   Donc, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^5 = -\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -7n = -\infty$. Il y a une forme indéterminée.

   On factorise : $n^3 - 7n + 1 = n^3\left(1 - \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)$

   Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ (limites de référence)

   Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = 1$

   D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

   Donc, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 7n + 1 = +\infty$

3. On obtient ici aussi une forme indéterminée : le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$.

   Aussi, on factorise : $t_n = \dfrac{5n^2+3n+1}{2n^2+8} = \dfrac{n^2\left(5 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \dfrac{8}{n^2}\right)} = \dfrac{5 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{2 + \dfrac{8}{n^2}}$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8}{n^2} = 0$

   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{8}{n^2} = 2$ (limites de référence)

   Par conséquent, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+3n+1}{2n^2+8} = \dfrac{5}{2}$

4. On a : $7 > 1$, donc d'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} 7^n \times 7^3 = +\infty$.

   Donc, par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times 7^{n+3} = -\infty$

Exercice 2 :

1. On sait que pour tout n : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

   Donc : $-3 \leq 3\cos(n) \leq 3$

   $6n - 3 \leq 6n + 3\cos(n) \leq 6n + 3$

   $\dfrac{6n-3}{n} \leq \dfrac{6n+3\cos(n)}{n} \leq \dfrac{6n+3}{n}$

   Posons : $v_n = \dfrac{6n-3}{n}$ et $w_n = \dfrac{6n+3}{n}$

   On a : $v_n = \dfrac{6n}{n} - \dfrac{3}{n} = 6 - \dfrac{3}{n}$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ (limite de référence), donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 6$

On trouve par la même méthode : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 6$

Ainsi, $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 6$.

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$

2. On a : $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = (-1)^n \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Donc : $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ou $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, suivant que n est pair ou impair.

   On a donc pour tout n : $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\dfrac{2}{3} < 1$.

   Et de même : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

   Ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

Exercice 3 :

1. $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{4\times 1}{1+1} = 2$

   $u_2 = f(u_1) = f(2) = \dfrac{4\times 2}{2+1} = \dfrac{8}{3} \simeq 2{,}7$

2. a) On considère la propriété : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
   Initialisation : On a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$ d'après la question 1.
   Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain entier n : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   On veut en déduire la propriété au rang suivant, c'est à dire : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.

   $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$
   On applique la fonction f, qui conserve l'ordre, car elle est croissante :

   $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1} \leqslant f(4)$
   On a : $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{16}{5} = 3{,}2 < 4$

   Donc : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

   Ainsi, la propriété est héréditaire.

   Récapitulons :
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire.
   Alors, d'après le principe du raisonnement par récurrence, elles est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) D'après la question 2, la suite (u_n) est croissante et majorée (par 4). D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit qu'elle est convergente.

c) On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et aussi $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} 4u_n = 4\ell$ (par produit) ;

$\lim_{n\to+\infty} u_n + 1 = \ell + 1$ (par somme)

et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4u_n}{u_n+1} = \dfrac{4\ell}{\ell+1}$ (par quotient).

Comme : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+1}$, on en déduit : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{4\ell}{\ell+1}$.

En identifiant, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell = \dfrac{4\ell}{\ell+1}$

On résout cette équation :

$\ell(\ell+1) = 4\ell$

$\ell^2 + \ell = 4\ell$

$\ell^2 - 3\ell = 0$

$\ell(\ell-3) = 0$ donc : $\ell = 0$ ou $\ell = 3$.

La solution $\ell = 0$ est impossible ici, car la suite (u_n) est croissante, donc tous les termes sont plus grands que u_0, qui vaut 1.

La limite de (u_n) est donc 3.

3. a) Il faut se souvenir que la condition qui suit le while est le contraire que ce qu'on veut obtenir en sortie. On veut obtenir à la fin : $3 - u_P < E$, donc la condition pour "continuer à boucler" est $3 - u_P >= E$.

```
def seuil(E) :
  u = 1
  n = 0
  while 3-u>= E
    u = (4*u)/(u+1)
    n = n + 1
  return n
```

b) On veut trouver la plus petite valeur de n telle que $3 - u_n < 0{,}1$,
c'est à dire : $3 - 0{,}1 < u_n$, autrement dit : $u_n > 2{,}9$.

Petit tableau :

n	0	1	2	3
u_n	1	2	$\frac{8}{3} \simeq 2{,}7$	$\frac{32}{11} \simeq 2{,}909$

On voit que le programme va renvoyer la valeur 3, dans le cas où $E = 0{,}1$.

4. a) C'est du calcul.

D'après la définition posée : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}$ (on a remplacé n par $n+1$).

On remplace u_{n+1} par $\dfrac{4u_n}{u_n+1}$:

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{4u_n}{u_n+1} - 3}{\dfrac{4u_n}{u_n+1}}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par (u_n+1) et simplifions :

$$v_{n+1} = \frac{4u_n - 3(u_n+1)}{4u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_n - 3u_n - 3}{4u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 3}{4u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{u_n - 3}{u_n} = \frac{1}{4} v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

On en déduit (formule de première) : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = \frac{1-3}{1} = -2.$$

On obtient : $v_n = -2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b) On part de la formule qui donne v_n en fonction de u_n et on exprime u_n en fonction de v_n :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

$$v_n \times u_n = u_n - 3$$

$$v_n \times u_n - u_n = -3$$

$$(v_n - 1)u_n = -3$$

$$u_n = \frac{-3}{v_n - 1}$$

c) On remplace dans la formule précédente l'expression de v_n en fonction de n :

$$u_n = \frac{-3}{v_n - 1} = \frac{-3}{-2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1},$$

soit, en multipliant par (-1) le numérateur et le dénominateur et en écrivant $\frac{1}{4}$ sous la forme 0,25 :

$$u_n = \frac{3}{2 \times 0{,}25^n + 1}$$

On peut vérifier que ça marche. On trouve $u_0 = \frac{3}{2 \times 0{,}25^0 + 1} = \frac{3}{2 \times 1 + 1} = \frac{3}{3} = 1$

De même : $u_1 = \frac{3}{2 \times 0{,}25^1 + 1} = \frac{3}{2 \times 0{,}25 + 1} = \frac{3}{1{,}5} = 2$

Et : $u_2 = \frac{3}{2 \times 0{,}25^2 + 1} = \frac{3}{2 \times 0{,}0625 + 1} = \frac{3}{1{,}125} = \frac{8}{3}$

On a : $\lim_{n \to +\infty} 0{,}25^n = 0 \quad$ car $0{,}25 \in]-1\,;1[$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} 2 \times 0{,}25^n + 1 = 1$ et donc : $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{2 \times 0{,}25^n + 1} = 3$.

On retrouve bien la limite de (u_n) déjà calculée au 2c.