

Mathématiques - Devoir surveillé n° 1

Spécialité mathématiques - 10.10.2023

Exercice 1 (4 points) :

Déterminer la limite en $+\infty$ des suites définies ci-dessous en utilisant les résultats du cours. Chaque suite est définie sur \mathbb{N} , sauf mention contraire.

1. $u_n = -2n^5 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ sur \mathbb{N}^*

2. $w_n = n^3 - 7n + 1$

3. $t_n = \frac{5n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 8}$

4. $t_n = -2 \times 7^{n+3}$

Exercice 2 (4 points) :

Déterminer la limite des suites ci-dessous en utilisant un théorème de comparaison.

1. $u_n = \frac{6n + 3 \cos(n)}{n}$

2. $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 3 (12 points) :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{x+1}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
- a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $3 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :  
    u = 1  
    n = 0  
    while .....  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

- Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 0,1$.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{-3}{v_n - 1}$.

c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{3}{2 \times 0,25^n + 1}$.

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .