Mathématiques - Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 (8 points) :

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous en utilisant les résultats du cours. Chaque suite est définie sur $\mathbb{N}$, sauf mention contraire.

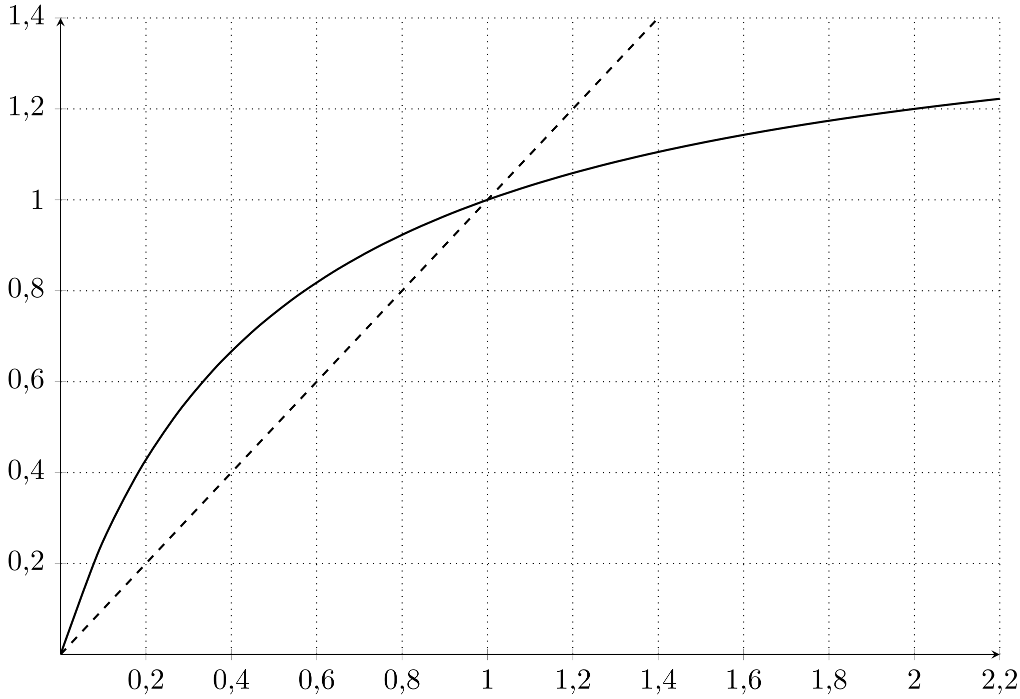
1. $u_n = 3n^2 + \dfrac{7}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$
2. $w_n = n^2 - 5n + 1$
3. $t_n = \dfrac{2n-1}{n+9}$
4. $r_n = 8^{n-2}$

Exercice 2 (12 points) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   La courbe représentant f est tracée dans le graphique ci-dessous ainsi que la droite d'équation $y = x$.



   Construire u_1 et u_2 sur le graphique (laisser les traits de construction).
3. Au vu du graphique, quelle conjecture peut-on faire concernant la suite (u_n) (croissance, limite...) ?
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3}{(1+2x)^2}$.
5. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
   On peut utiliser ce résultat dans les questions suivantes.
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.
7. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
8. Démontrer que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de déterminer la limite).

9. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
10. Calculer v_0 et exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
11. Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2 \times 3^n}{2 \times 3^n - 1}$.
12. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (2 points) : Question bonus

Soit (u_n) une suite convergente. Démontrer que (u_n) est alors forcément bornée.

Rappel : dire que (u_n) est convergente signifie qu'elle a une limite, et que cette limite est finie.