Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 :

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous en utilisant les résultats du cours. Chaque suite est définie sur $\mathbb{N}$, sauf mention contraire.

1. $u_n = 3n^2 + \dfrac{7}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$

   Pas de forme indéterminée.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ (par produit)

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n} = 0$ (par produit)

   Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

2. $w_n = n^2 - 5n + 1$

   Il y a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

   On factorise :

   $n^2 - 5n + 1 = n^2\left(1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ (limite de référence)

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ (par produit)

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ (limite de référence)

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 1$ (par somme)

   Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$ (par produit)

3. $t_n = \dfrac{2n-1}{n+9}$

   Il y a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

   On factorise (en supposant $n \neq 0$) :

   $$\frac{2n-1}{n+9} = \frac{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{9}{n}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{9}{n}}$$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2$ (par somme)

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{9}{n} = 1$ (par somme)

   Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 2}$ (par quotient)

4. $r_n = 8^{n-2}$

   $8^{n-2} = 8^n \times 8^{-2} = 8^n \times \dfrac{1}{64}$.

   Comme $8 > 1$, d'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$.

   Donc (par produit) : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty}$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et telle que pour tout entier naturel n :

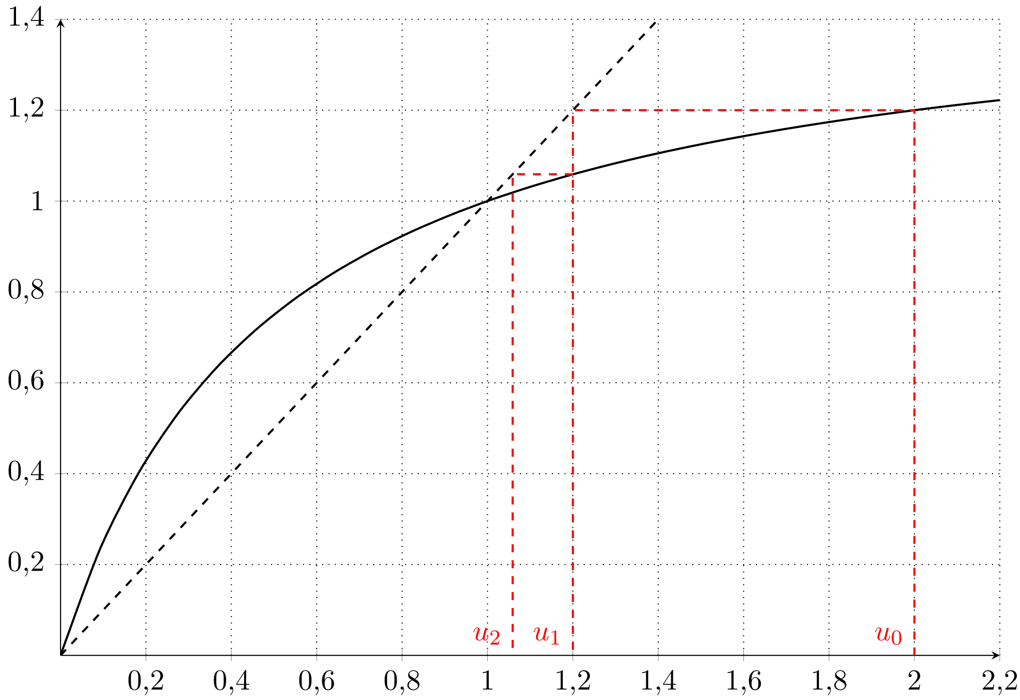
$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{3\times 2}{1+2\times 2} = \frac{6}{5}$$

$$u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{3\times\frac{6}{5}}{1+2\times\frac{6}{5}} = \frac{18}{17}$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
La courbe représentant f est tracée dans le graphique ci-dessous ainsi que la droite d'équation $y = x$.



Construire u_1 et u_2 sur le graphique (laisser les traits de construction).

3. Au vu du graphique, quelle conjecture peut-on faire concernant la suite (u_n) (croissance, limite...) ?

On peut conjecturer que (u_n) est décroissante et de limite 1 .

4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3}{(1+2x)^2}$.

On applique la formule donnant la dérivée d'un quotient.
$u(x) = 3x$ donc $u'(x) = 3$
$v(x) = 1+2x$ donc $v'(x) = 2$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3\times(1+2x) - 3x\times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3+6x-6x}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2}$$

5. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
On peut utiliser ce résultat dans les questions suivantes.
$f'(x)$ est positif pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ (quotient de deux nombres positifs).

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$

6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.
   On a d'abord : $u_0 > 1$. La propriété est vraie au rang 0.

   Supposons qu'elle soit vraie pour un rang n quelconque. On a ainsi : $u_n > 1$.

   Comme la fonction f est strictement croissante, on en déduit : $f(u_n) > f(1)$.

   Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \dfrac{3 \times 1}{1 + 2 \times 1} = 1$.
   On obtient alors : $u_{n+1} > 1$ et la propriété est alors vraie au rang $n + 1$.

   On a démontré :
   - La propriété est vraie pour $n = 0$
   - Si elle est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour $n + 1$.

   D'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   Soit la propriété : $u_{n+1} \leq u_n$

   On a d'abord : $u_1 \leq u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

   Supposons qu'elle soit vraie pour un rang n quelconque. On a ainsi : $u_{n+1} \leq u_n$.

   Comme la fonction f est strictement croissante, on en déduit : $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

   Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
   On obtient alors : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ et la propriété est alors vraie au rang $n + 1$.

   On a démontré :
   - La propriété est vraie pour $n = 0$
   - Si elle est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour $n + 1$.

   D'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On a $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n, par conséquent la suite est décroissante.

8. Démontrer que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de déterminer la limite).
   D'après les deux questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée.
   D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit qu'elle est convergente.

9. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   On a : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}}$

   Multiplions le numérateur et le dénominateur par $1 + 2u_n$ pour chasser les fractions :

   $v_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n - 3u_n} = \dfrac{3u_n}{1 - u_n} = 3 \times \dfrac{u_n}{1 - u_n} = 3v_n$

   On passe de v_n à v_{n+1} en multipliant toujours par 3 ; donc (v_n) est géométrique de raison 3.

10. Calculer v_0 et exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

$v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{2}{1-2} = -2.$

Comme (v_n) est géométrique, alors : $v_n = v_0 \times q^n$, donc ici : $v_n = -2 \times 3^n$.

11. Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2 \times 3^n}{2 \times 3^n - 1}$.

On connaît v_n en fonction de u_n, il faut en déduire u_n en fonction de v_n.

$v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ donc :
$v_n(1-u_n) = u_n$
$v_n - u_n v_n = u_n$
$v_n = u_n + u_n v_n$
$v_n = u_n(1+v_n)$
$\dfrac{v_n}{1+v_n} = u_n$ soit : $\boxed{u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}}$

On remplace v_n par l'expression trouvée précédemment.

$u_n = \dfrac{-2 \times 3^n}{-2 \times 3^n + 1} = \dfrac{2 \times 3^n}{2 \times 3^n - 1}$

12. En déduire la limite de la suite (u_n).

On voit qu'on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On factorise :
$$\frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^n - 1} = \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^n \left(1 - \dfrac{1}{2 \times 3^n}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2 \times 3^n}}$$

On a d'abord :
$$\frac{1}{2 \times 3^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Comme $\dfrac{1}{3} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

Donc, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

Donc, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$

Enfin, en passant à l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = 1$

On trouve donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

Exercice 3 : Question bonus

Soit (u_n) une suite convergente. Démontrer que (u_n) est alors forcément bornée.

Rappel : dire que (u_n) est convergente signifie qu'elle a une limite, et que cette limite est finie.

Soit ℓ la limite de (u_n). D'après la définition, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Choisissons par exemple l'intervalle $]\ell-1\,;\ell+1[$. Tous les termes de la suite sont dans cet intervalle à partir d'un certain rang ; notons-le par exemple p.

Ainsi, pour tout $n \geq p$, u_n est compris entre $\ell-1$ et $\ell+1$: (u_n) est bornée à partir du rang p.

D'autre part, les termes u_n pour $n < p$ sont en nombre fini. Ils sont donc majorés par le plus grand d'entre eux et minorés par le plus petit. Ils sont bornés aussi.

On constate que (u_n) est bornée pour $n < p$ et aussi pour $n \geq p$. Elle est donc bornée (tout court).