Corrigé du devoir maison n° 1

Exercice 1 :

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. Les droites (d) et (d') sont définies par les systèmes de représentation paramétrique suivants :

$$(d)\left\{\begin{array}{l} x=8+t \\ y=7+t \\ z=9+2t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \qquad (d')\left\{\begin{array}{l} x=2+3s \\ y=5-s \\ z=-1+4s \end{array}\right. \quad s\in\mathbb{R}$$

Déterminer la position relative des droites (d) et (d') : parallèles, sécantes ou non coplanaires.

Un vecteur directeur de (d) est : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d') est : $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles ; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Ces deux droites sont sécantes si elles ont un point en commun ; dans ce cas, les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de ce point vérifient à la fois le système de représentation paramétrique de (d) et celui de (d').

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} x=8+t=2+3s \\ y=7+t=5-s \\ z=9+2t=-1+4s \end{array}\right.$. On doit donc résoudre le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3s \\ 7+t=5-s \\ 9+2t=-1+4s \end{array}\right.$

Prenons d'abord le système formé par les deux premières lignes : $\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3s \\ 7+t=5-s \end{array}\right.$.

En remplaçant $(L2)$ par $(L2)-(L1)$, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3s \\ 7+t-8-t=5-s-2-3s \end{array}\right.$

soit : $\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3s \\ -1=3-4s \end{array}\right.$

On en déduit successivement :

$$\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3s \\ -4=-4s \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3s \\ s=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 8+t=2+3 \\ s=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=-3 \\ s=1 \end{array}\right.$$

On regarde si le couple $(-3\,;1)$ est aussi solution de la dernière équation : $9+2\times(-3)=3=-1+4\times 1$. C'est juste.

Donc le couple $(-3\,;1)$ est solution du système (S). Il existe donc un triplet $(x\,;y\,;z)$ solution à la fois des systèmes de représentation paramétrique de (d) et de (d').

Donc les droites sont sécantes.

Déterminons les coordonnées de leur point d'intersection, I (ce qui permettra aussi de vérifier le calcul).

$$\left\{\begin{array}{l} x=8+t=8-3=5 \\ y=7+t=7-3=4 \\ z=9+2t=9-6=3 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3s = 2 + 3 = 5 \\ y = 5 - s = 5 - 1 = 4 \\ z = -1 + 4s = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

Ainsi, I a pour coordonnées $(5 ; 4 ; 3)$.

Exercice 2 :

Déterminer les limites suivantes et préciser les asymptotes éventuelles :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - x^3$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{4x + 3}{x^2 - 4}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{3}{x - \sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{4x^3 + 5x + 1}{x^3 + x^2 + 1}}$

---

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} - 1 \right)$

   Or, d'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$ (L'exponentielle l'emporte en cas de forme indéterminée).

   Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} - 1 = +\infty$

   D'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

   Et donc (par produit) : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} - 1 \right) = +\infty$

   Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - x^3 = +\infty$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} 4x + 3 = -5$

   $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^2 - 4 = 0^-$ car le trinôme est du signe de $(-a)$ entre les racines, qui sont (-2) et 2.

   Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{1}{x^2 - 4} = -\infty$

   On en déduit (par produit) : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{4x + 3}{x^2 - 4} = +\infty$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{3}{x - \sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$ car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x$

   Or, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0^+$

   On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} - 1 = -1$

   Et donc (par produit) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0^-$

   Par conséquent (par quotient) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = -\infty$ soit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{3}{x - \sqrt{x}} = -\infty$

   On peut faire le lien avec la propriété de seconde : si $x \in [0 ; 1]$, on a : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

4. On va utiliser la propriété donnant la limite d'une fonction composée.
La limite d'une fonction rationnelle en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, donc :
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+5x+1}{x^3+x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3}{x^3} = 4 \\ \\ \lim\limits_{y\to 4} \sqrt{y} = 2 \end{array}\right\} \quad \text{donc, par composition : } \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{4x^3+5x+1}{x^3+x^2+1}} = 2$$

Exercice 3 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) de nombres positifs : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

On construit alors la suite (w_n) en posant pour tout n : $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Autrement dit : $w_n = u_0 \times v_n + u_1 \times v_{n-1} + u_2 \times v_{n-2} + ... + u_{n-1} \times v_1 + u_n \times v_0$.

Posons ensuite pour tout n :

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} v_j = v_0 + v_1 + ... + v_n$$

et $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k = w_0 + w_1 + ... + w_n$.

1. Démontrer que pour tout n : $A_n \times B_n \leq C_{2n} \leq A_{2n} \times B_{2n}$.

   On peut s'aider du graphique ci-dessous.
2. On suppose que les suites A_n et B_n sont convergentes et on pose :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = a$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = b$.
   Démontrer que C_n est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = ab$.

---

1. a) Démontrons d'abord que $A_nB_n \leq C_{2n}$.
   Si l'on développe $A_n \times B_n$, on trouve une somme de termes de la forme $u_i \times v_j$, où i et j prennent toutes les valeurs entre 0 et n ; par ailleurs, chacun de ces termes n'apparaît qu'une fois.
   Autrement dit : $A_n \times B_n = u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + ... + u_0v_n + u_1v_0 + u_1v_1 + ... + u_1v_n + u_2v_0 + ... + u_nv_n$

   Formellement, on peut écrire : $A_nB_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n} u_iv_j$

   ou : $A_nB_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=0}^{n} u_iv_j$

   ou encore : $A_nB_n = \sum\limits_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq n}} u_iv_j$

   On peut trouver ces trois notations dans les livres.

   Voyons ensuite C_{2n}.

   $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k = w_0 + w_1 + ... + w_n$.

   Or : $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}$

Ainsi : $w_0 = u_0v_0$
$w_1 = u_0v_1 + u_1v_0$
$w_2 = u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0$
$w_3 = u_0v_3 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_3v_0$
...
$w_{2n} = u_0v_{2n} + u_1v_{2n-1} + u_2v_{2n-2} + ... + u_nv_n + ... + u_{2n-1}v_1 + u_{2n}v_0$

On somme tous ces termes pour obtenir C_{2n} ; ici aussi, chaque terme n'apparaît qu'une fois.

Formellement, on peut écrire : $C_{2n} = \sum_{\substack{0\leq i\\ 0\leq j\\ i+j\leq 2n}} u_iv_j$

On voit que si $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$, alors $0 \leq i + j \leq 2n$ et donc le terme u_iv_j apparaît dans la somme précédente.

Autrement dit, tous les termes u_iv_j qui apparaissent dans le développement de A_nB_n apparaissent aussi dans C_{2n}. (La réciproque est fausse, par exemple u_0v_{n+1} n'apparaît pas dans A_nB_n).

On peut donc écrire : $C_{2n} = A_nB_n + y$ avec $y =$ somme des termes u_iv_j qui apparaissent dans C_{2n} mais pas dans A_nB_n.

(On voit que y est la somme des u_iv_j pour lesquels $i + j \leq 2n$ mais $i \geq n + 1$ ou $j \geq n + 1$.)

Comme $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, alors $y \geq 0$

On en déduit : $C_{2n} \geq A_nB_n$

b) Démontrons à présent que $C_{2n} \leq A_{2n}B_{2n}$

Comme précédemment, si on développe $A_{2n} \times B_{2n}$, on trouve une somme de termes de la forme $u_i \times v_j$, où i et j prennent toutes les valeurs entre 0 et $2n$; par ailleurs, chacun de ces termes n'apparaît qu'une fois.

Or, si i et j sont positifs et si $i + j \leq 2n$, alors chacun des deux est plus petit que $2n$ (sinon $i + j$ serait strictement plus grand que $2n$). Ainsi : $i \leq 2n$ et $j \leq 2n$

Autrement dit, tous les termes u_iv_j qui apparaissent dans C_{2n} apparaissent aussi dans le développement de $A_{2n}B_{2n}$. (La réciproque est fausse ici aussi, par exemple u_nv_{n+1} n'apparaît pas dans C_{2n}).

Comme les termes u_iv_j sont tous positifs, on en déduit comme précédemment : $A_{2n}B_{2n} \geq C_{2n}$

Finalement, on a pour tout n : $A_n \times B_n \leq C_{2n} \leq A_{2n} \times B_{2n}$.

2. La suite C_n a toujours une limite (finie ou infinie), car elle est croissante.
En effet, chacun des termes w_n est positif (somme de termes positifs), donc $C_{n+1} = C_n + w_{n+1} \geq C_n$.

Supposons à présent : $\lim_{n\to+\infty} A_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = b$.
D'après la propriété de la limite d'un produit, on en déduit : $\lim_{n\to+\infty} A_n \times B_n = ab$.
Bien sûr, on a aussi : $\lim_{n\to+\infty} A_{2n} \times B_{2n} = ab$ (même suite, même limite).
Comme d'autre part $A_n \times B_n \leq C_{2n} \leq A_{2n} \times B_{2n}$ (question 1), le théorème des gendarmes permet de conclure que : $\lim_{n\to+\infty} C_n = ab$